УДК 514.76

Н. А. Тяпин

АВТОМОРФИЗМЫ КОНТАКТНО-АФФИННЫХ СТРУКТУР

Аннотация. *Актуальность и цели*. Контактно-аффинная структура является частным случаем контактной структуры, а точнее, это контактная структура, дополненная согласованной с ней линейной связностью. В настоящей статье согласованность рассматривается как инвариантность контактного распределения относительно параллельных переносов в структурной связности вдоль любых кривых. Представляет интерес изучение автоморфизмов контактно-аффинных структур, так как размерности этих групп заведомо конечны. *Материалы и методы*. Для исследования групп автоморфизмов контактно-аффинных структур используются методы тензорного анализа, а также методы теории групп Ли и алгебр Ли. *Результаты*. Найдены аналитические условия согласованности линейной связности и контактной структуры в смысле инвариантности контактного распределения относительно параллельных переносов в этой линейной связности вдоль любых кривых. Доказано, что в этом случае структурная связность необходимо имеет кручение. Указана оценка сверху размерности группы автоморфизмов контактно-аффинной структуры. *Выводы*. Методы тензорного анализа, а также методы теории групп Ли и алгебр Ли позволяют эффективно исследовать группы автоморфизмов контактно-аффинных структур.

Ключевые слова: контактная структура, контактно-аффинная структура, автоморфизмы дифференциально-геометрических структур.

N. A. Tyapin

AUTOMORPHISMS IN CONTACT-AFFINE STRUCTURES

Abstract. *Background*. Contact-affine structure is a special case of the contact structure, particularly, it is a contact structure supplemeted by linear connectivity coordinated with the structure. In the article the coordination is considered as the invariance of contact distribution relative to parallel transfers in structure connectivity along any curves. The study of automorphisms of contact-affine structures is of interest due to the fact that the dimensionalities of these groups are trivially finite. *Materials and methods*. To research the groups of automorphisms of contact-affine structures the author uses the methods of tensor analysis as well as the methods of Lie group theory and Lie algebra. *Results*. The researcher discovered analytical conditions of coordination of the linear connectivity and the contact structure in the sense of invariance of the contact distribution relative to parallel transfers in the said linear connectivity along any curves. It is proved that in this case the structure connectivity necessarily has twisting. The article adduces the value from the top of the dimensionality of the group of automorphisms of the contact-affine structure. *Conclusions*. The methods of tensor analysis as well as the methods of Lie group theory and Lie algeba allow effective researching of the groups of automorphisms of contact-affine structures.

Key words: contact structure, contact-affine structure, automorphisms of differential-geometric structures.

Контактной формой на гладком $(2n+1)$-мерном многообразии M называется дифференциальная 1-форма η такая, что выполняется условие

$$\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta}_{n \text{ раз}} \neq 0.$$

Контактная форма определяет контактное распределение $\ker\eta = £$, которое называется контактной структурой. Многообразие с фиксированной на нем контактной структурой называется контактным многообразием [1].

Из теоремы Дарбу вытекает, что контактное многообразие M допускает атлас, в каждой карте (U, φ) которого с координатами $(x^1, \ldots, x^{2n}, x^m)$ форма η имеет канонический вид:

$$\eta = -x^{n+1}dx^1 - \ldots - x^{2n}dx^n + dx^m. \tag{1}$$

Пусть M – нечетномерное гладкое контактное многообразие, $\dim M = m = 2n+1$. В дальнейшем будем считать, что индексы принимают следующие значения:

$$a, b, c, i, j, k, \ldots = 1 \ldots m, \ \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1 \ldots n, \ \bar{\alpha} = n + \alpha.$$

Если контактная структура на M определена с помощью контактной формы η, то в некоторой карте Дарбу с координатами $(x^1, \ldots, x^{2n+1})$ ненулевые компоненты форм η и $\Omega = d\eta$ имеют вид

$$\eta_\alpha = -x^{\bar{\alpha}}, \quad \eta_m = 1, \quad \Omega_{\alpha,\bar{\alpha}} = -\Omega_{\bar{\alpha},\alpha} = -1. \tag{2}$$

Характеристическое векторное поле ξ, удовлетворяющее условиям $\eta(\xi) = 1$ $\xi \in \ker\Omega$, в координатах Дарбу имеет вид $\xi = \partial_m$.

Пусть на контактном многообразии M с контактной формой η задана линейная связность $\bar{\nabla}$ и пусть $x(t)$, $a \leq t \leq b$, – некоторая кривая. Для любого значения t задан линейный оператор L_t, сопоставляющий касательному вектору в точке $x(a)$ результат его параллельного переноса в точку $x(t)$ вдоль данной кривой. Если для каждой кривой параллельный перенос вектора сохраняет значение контактной формы на этом векторе, т.е. $\eta(\zeta) = \eta(L_t\zeta)$, то естественно говорить, что связность согласована с формой.

Найдем аналитические условия, выделяющие такие связности. Пусть $\zeta(t)$ – параллельное векторное поле вдоль кривой $x(t)$. Предположим, что связность согласована с контактной формой η:

$$\frac{d}{dt}\eta(\zeta) = \frac{d}{dt}\Big(\eta_i(x(t))\zeta^i(t)\Big) = 0. \tag{3}$$

Распишем это соотношение в терминах ковариантных производных:

$$\frac{d}{dt}\Big(\eta_i(x(t))\zeta^i(t)\Big) = (\bar{\nabla}_{\dot{x}}\eta_i)\zeta^i + \eta_i(\bar{\nabla}_{\dot{x}}\zeta^i) = 0. \tag{4}$$

Так как поле ζ параллельно, мы заключаем, что в каждой точке выполняется равенство

$$(\overline{\nabla}_{\dot{x}}\eta_i)\zeta^i = 0. \tag{5}$$

Заметим, что любой вектор является вектором скорости какой-то кривой и любой вектор может быть продолжен до параллельного векторного поля вдоль этой кривой. Поэтому мы получаем, что

$$\overline{\nabla}\eta = 0. \tag{6}$$

Если на контактном многообразии M задана линейная связность $\tilde{\nabla}$, согласованная с контактной структурой условием (6), то в этом случае будем говорить, что на многообразии M задана контактно-аффинная структура $(\eta, \tilde{\nabla})$.

Обозначим через $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ компоненты $\tilde{\nabla}$ в некоторой локальной системе координат. Определим симметрическую связность $\nabla(\Gamma_{ij}^k)$ и поле тензора кручения $T(T_{ij}^k) \in \mathcal{F}_2^1(M)$ естественным образом:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(\tilde{\Gamma}_{ij}^k + \tilde{\Gamma}_{ji}^k) = \tilde{\Gamma}_{(ij)}^k, \qquad T_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ji}^k = 2\tilde{\Gamma}_{[ij]}^k, \tag{7}$$

таким образом,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}T_{ij}^k. \tag{8}$$

Распишем условие (6) в координатах $\tilde{\nabla}_i\eta_j = \partial_i\eta_j - \tilde{\Gamma}_{ij}^s\eta_s = 0$, откуда $\partial_i\eta_j = \tilde{\Gamma}_{ij}^s\eta_s$. Так как $\Omega_{ij} = (d\eta)_{ij} = \partial_i\eta_j - \partial_j\eta_i$, получим

$$\Omega_{ij} = T_{ij}^s\eta_s. \tag{9}$$

Откуда следует, что компоненты тензора кручения не могут быть все нулевыми и, следовательно, связность $\tilde{\nabla}$ необходимо имеет кручение (см. также [2]).

Логично также рассмотреть условие согласованности аффинной связности $\overline{\nabla}$ и контактной структуры £, определяемой контактной формой η. Геометрически это означает, что при параллельном перенесении вдоль любой кривой будет сохраняться контактное распределение. Аналитическим условием согласованности такого типа является условие

$$\nabla\eta = \omega\eta, \tag{10}$$

где ω – некоторая дифференциальная 1-форма. Или в координатах:

$$(\nabla\eta)_{ij} = \omega_i\eta_j. \tag{11}$$

Если на контактном многообразии M задана линейная связность $\tilde{\nabla}$, согласованная с контактной структурой £, определяемой контактной формой η, условием (10), то в этом случае будем говорить, что на многообразии M задана контактно-аффинная структура (£, $\tilde{\nabla}$).

Действительно, пусть мы имеем в некоторой бесконечно малой окрестности точки x новую 1-форму $\bar{\eta}$, полученную из контактной формы $\lambda\eta$ параллельными перенесениями из этой точки на бесконечно малые векторы δx. Нам нужно, чтобы форма $\bar{\eta}$ была коллинеарна форме $\lambda\eta$. Это значит, что в окрестности определена функция f так, что $\bar{\eta} = f\eta$:

$$\lambda\eta_j + \lambda\eta_s\Gamma^s_{kj}\delta x^k = \lambda\eta_j + \partial_k(\lambda\eta_j)\delta x^k + \lambda\eta_j(\partial_k f)\delta x^k ,$$

откуда следует, что

$$\lambda\eta_s\Gamma^s_{kj} = \partial_k(\lambda\eta_j) + \lambda(\partial_k f)\eta_j ,$$

таким образом,

$$\eta_s\Gamma^s_{kj} = \frac{\partial_k(\lambda\eta_j)}{\lambda} + (\partial_k f)\eta_j ,$$

и окончательно имеем

$$\nabla_k\eta_j = -\left(\frac{\partial_k\lambda}{\lambda} + \partial_k f\right)\eta_j = -\partial_k(\ln\lambda + f)\eta_j = \omega_k\eta_j .$$

Если мы имеем контактно-аффинную структуру $(£, \bar{\nabla})$, тогда из условия (10) следует, что

$$\partial_i\eta_j - \bar{\Gamma}^s_{ij}\eta_s = \omega_i\eta_j .$$

Циклируя по индексам i и j, получим

$$\partial_j\eta_i - \bar{\Gamma}^s_{ji}\eta_s = \omega_j\eta_i .$$

Вычитая из первого равенства второе, будем иметь

$$\partial_i\eta_j - \partial_j\eta_i - (\bar{\Gamma}^s_{ij}\eta_s - \bar{\Gamma}^s_{ji}\eta_s) = \omega_i\eta_j - \omega_j\eta_i$$

или

$$\Omega_{ij} - T^s_{ij}\eta_s = (\omega\wedge\eta)_{ij} .$$

Таким образом, получаем, что тензор кручения T структурной связности $\bar{\nabla}$ должен удовлетворять следующему условию:

$$T^s_{ij}\eta_s = \Omega_{ij} - (\omega\wedge\eta)_{ij} . \tag{12}$$

Определим 2-форму $\vartheta_{ij} = T^s_{ij}\eta_s$ или $\vartheta(X,Y) = \eta(T(X,Y))$, тогда условие (12) можно записать в виде

$$\vartheta = \Omega - \omega \wedge \eta.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если выполняется условие согласованности (10), то структурная связность имеет ненулевое кручение.

Доказательство. Предположим, что $T = 0$, следовательно, $\vartheta = 0$. Пусть X' – некоторый вектор из контактного распределения. Тогда

$$\vartheta(X', \xi) = \omega(X') = 0.$$

Получаем, что $\ker\omega \supset \ker\eta$, следовательно, $\omega = k\eta$, где k – некоторый скаляр. Откуда получаем, что $\vartheta = \Omega$. Получаем противоречие, так как форма Ω ненулевая. □

Диффеоморфизм $\varphi: M \to M$ называется *точным контактно-аффинным преобразованием* или *точным автоморфизмом контактно-аффинной структуры* $(£, \overline{\nabla})$, если он сохраняет контактную форму η, определяющую контактную структуру £, и связность $\overline{\nabla}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Максимальная размерность группы Ли точных автоморфизмов контактно-аффинной структуры $(£, \overline{\nabla})$ не превышает $2n^2 + 3n + 1$.

Доказательство. Пусть G – группа Ли точных автоморфизмов контактно-аффинной структуры $(£, \overline{\nabla})$ и пусть G_x – стационарная подгруппа группы G точки $x \in M$, а $\overline{G}_x$ – группа изотропии в $T_x M$, индуцированная группой G_x. $\overline{G}_x$ является подгруппой полной линейной группы $GL(m, \mathbb{R})$.

Каждое преобразование группы $\overline{G}_x$ оставляет тензор кручения и контактную форму в точке x инвариантными. Рассмотрим η как линейное отображение $T_x M \to \mathbb{R}$, а T, в свою очередь, как кососимметрическое билинейное отображение $T_x M \times T_x M \to T_x M$. Пусть $X : T_x M \to T_x M$ – линейное преобразование, а $\varphi_t = \exp tX$ – однопараметрическая группа преобразований, порожденная векторным полем X, тогда

$$\begin{cases} \eta(\varphi_t v) = \eta(v), \\ T(\varphi_t X v, \varphi_t w) = \varphi_t(T(v, w)). \end{cases}$$

Дифференцируя эти уравнения по t, при $t = 0$ видим, что X принадлежит алгебре Ли G'_x группы Ли G_x, если и только если

$$\begin{cases} \eta(Xv) = 0, \\ T(Xv, w) + T(v, Xw) = X\big(T(v, w)\big). \end{cases} \tag{13}$$

Координаты атласа Дарбу естественным образом определяют базис $\{\partial_i\}$ в $T_x M$. Пусть T_{ij}^k, η_i и X_j^i – компоненты соответственно для T, η и X относительно указанного базиса. Тогда система (13) эквивалентна следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \eta_j X_b^j = 0, \\ T_{jc}^a X_b^j + T_{bj}^a X_c^j - T_{bc}^j X_j^a = 0. \end{cases}$$

Это может быть переписано как

$$\begin{cases} C_b(\tbinom{j}{i}) X_j^i = 0, \\ A_{bc}^a(\tbinom{j}{i}) X_j^i = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$C_b(\tbinom{j}{i}) = \eta_i \delta_b^j, \quad A_{bc}^a(\tbinom{j}{i}) = T_{ic}^a \delta_b^j + T_{bi}^a \delta_c^j - T_{bc}^j \delta_i^a.$$

Система (14) – система из $m^3 + m$ линейных однородных уравнений с m^2 неизвестными X_j^i и коэффициентами $C_b(\tbinom{j}{i})$, $A_{bc}^a(\tbinom{j}{i})$. Число существенных уравнений системы (14) равно рангу матрицы $F = \begin{pmatrix} C_d(\tbinom{j}{i}) \\ A_{bc}^a(\tbinom{j}{i}) \end{pmatrix}$, где пара индексов (i, j) нумерует столбец, а индексы (a,b,c), d нумеруют строку.

Рассмотрим следствия системы (14). Для этого выполним свертку второй группы уравнений данной системы с контактной формой η:

$$A_{bc}^a(\tbinom{j}{i}) \eta_a X_j^i = B_{bc}(\tbinom{j}{i}) X_j^i = 0,$$

где

$$A_{bc}^a(\tbinom{j}{i}) \eta_a X_j^i = T_{ic}^a \eta_a \delta_b^j X_j^i + T_{bi}^a \eta_a \delta_c^j X_j^i - T_{bc}^j \delta_i^a \eta_a X_j^i =$$

$$= (\Omega_{ic} \delta_b^j + (\omega_i \eta_c - \omega_c \eta_i) \delta_b^j + \Omega_{bi} \delta_c^j + (\omega_b \eta_i - \omega_i \eta_b) \delta_c^j) X_j^i = B_{bc}(\tbinom{j}{i}) X_j^i; \tag{15}$$

$$B_{bc}(\tbinom{j}{i}) = (\Omega_{ic} + \omega_i \eta_c - \omega_c \eta_i) \delta_b^j + (\Omega_{bi} + \omega_b \eta_i - \omega_i \eta_b) \delta_c^j,$$

или с учетом первой группы уравнений

$$B_{bc}(\tbinom{j}{i}) = (\Omega_{ic} + \omega_i \eta_c) \delta_b^j + (\Omega_{bi} - \omega_i \eta_b) \delta_c^j.$$

Мы получим новую систему

$$\begin{cases} C_b(\tbinom{j}{i}) X_j^i = 0, \\ B_{bc}(\tbinom{j}{i}) X_j^i = 0, \end{cases} \tag{16}$$

которая является следствием системы (14).

Система (16) – система из $m^2 + m$ линейных однородных уравнений с m^2 неизвестными X_j^i и коэффициентами $C_b(\tbinom{j}{i})$, $B_{bc}(\tbinom{j}{i})$. Число существенных уравнений системы (16) равно рангу матрицы $F' = \begin{pmatrix} C_d(^j_i) \\ B_{bc}(^j_i) \end{pmatrix}$,

где пара индексов (i, j) нумерует столбец, а индексы (b, c), d нумеруют строку. Элементы матрицы F' выражаются через компоненты форм η, Ω, которые в атласе Дарбу имеют вид (2), а также через компоненты формы ω, которые в атласе Дарбу, вообще говоря, не определены.

Так как элементы матрицы F' не определены однозначно, т.е. зависят от произвольных функций – компонент 1-формы ω, то мы можем лишь оценить ее ранг. Так как строки матрицы F' есть линейные комбинации строк матрицы F, мы можем утверждать, что $\mathrm{Rank}(F) \geq \mathrm{Rank}(F')$, т.е. число существенных уравнений системы (14) не превосходит числа существенных уравнений системы (16).

Пусть

$$D_{bc}\left(^j_i\right) = (\Omega_{ic} + \omega_i\eta_c - \omega_c\eta_i)\delta^j_b,$$

тогда

$$B_{bc}\left(^j_i\right) = D_{bc}\left(^j_i\right) - D_{cb}\left(^j_i\right).$$

Также введем в рассмотрение новые системы коэффициентов

$$\overline{B}_{bc}\left(^j_i\right) = \Omega_{ic}\delta^j_b + \Omega_{bi}\delta^j_c = \overline{D}_{bc}\left(^j_i\right) - \overline{D}_{cb}(\left(^j_i\right),$$

$$\overline{D}_{bc}\left(^j_i\right) = \Omega_{ic}\delta^j_b,$$

откуда

$$B_{bc}\left(^j_i\right) = \overline{B}_{bc}\left(^j_i\right) + \omega_i\eta_c\delta^j_b - \omega_i\eta_b\delta^j_c,\ \ D_{bc}\left(^j_i\right) = \overline{D}_{bc}\left(^j_i\right) + \omega_i\eta_c\delta^j_b.$$

Строки матрицы D, нумеруемые парами $c = n$, содержат все линейно независимые строки матрицы $\omega_i\eta_c\delta^j_b$. Действительно, ведь соответствующие строки матрицы $\overline{D}$ нулевые, а множитель η_c не добавляет новых линейно независимых строк. Таким образом, ранг матрицы D не меньше ранга матрицы $\overline{D}$ и, следовательно, $\mathrm{Rank} B \geq \mathrm{Rank} \overline{B}$. Чтобы оценить ранг матрицы F', мы оценим ранг матрицы

$$\overline{F'} = \begin{pmatrix} C_d\left(^j_i\right) \\ \overline{B}_{bc}\left(^j_i\right) \end{pmatrix}.$$

Найдем ранг матрицы $\overline{F'}$. Для этого сначала рассмотрим матрицу $\overline{B}$ как минор матрицы $\overline{F'}$. Введем в рассмотрение новую матрицу

$\overline{D}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)=\Omega_{ic}\delta_b^j$, где пара индексов (b,c) нумерует строку матрицы, а пара индексов (i,j) нумерует столбец. В силу кососимметричности Ω получим, что $\overline{D}_{cb}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)=\Omega_{ib}\delta_c^j=-\Omega_{bi}\delta_c^j$. Таким образом,

$$\overline{B}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)=\Omega_{ic}\delta_b^j+\Omega_{bi}\delta_c^j=\overline{D}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)-\overline{D}_{cb}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right),$$

это означает, что каждая строка матрицы $\overline{B}$ есть разность двух строк матрицы $\overline{D}$. Остановимся подробнее на матрице $\overline{D}$. В силу того, что $\Omega_{im}=0$, строки $\overline{D}$, нумеруемые парой вида (b, m), состоят целиком из нулей. Если $c\neq m$ и $b\neq\overline{c}$, тогда все элементы строки (b,c) равны нулю, за исключением одного, который равен 1 или –1. Действительно, чтобы элемент $\overline{D}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)=\Omega_{ic}\delta_b^j$ не был равен нулю, требуется, чтобы $\Omega_{ic}\neq 0$ и $\delta_b^j\neq 0$, что возможно лишь, если $i=\overline{c}$ и $j=b$. Таким образом, все элементы строки (b,c) равны нулю, кроме того, который находится на пересечении со столбцом $(i=\overline{c}, j=b)$. Если же $b=\overline{c}$, тогда строка содержит ± 1 на пересечении со столбцом $(i=\overline{c}, j=b)$ и подстроку с компонентами $\mp\eta_i$ на пересечении со столбцами $(i, j=m)$. Если переставить строки матрицы D по следующему закону $b'=\overline{b}(b\neq m), b'=m(b=m)$ и убрать из получившейся матрицы нулевые столбцы и строки с номерами $(b', c'=m)$ и $(i=m, j)$, то мы получим верхнетреугольную матрицу $\overline{D}_{b'c}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)$ размера (m^2-m) на (m^2-m). Ее ранг, очевидно, равен (m^2-m), и, следовательно, все ненулевые столбцы исходной матрицы $\overline{D}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)$ линейно независимы между собой.

Строки матрицы $\overline{B}$ кососимметричны по индексам (b,c), так как $\overline{B}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)=(\overline{D}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)-\overline{D}_{cb}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right))=(-\overline{D}_{cb}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)+\overline{D}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right))=-\overline{B}_{cb}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)$. Поэтому имеет смысл рассматривать не все строки (b,c), а лишь те, для которых $b<c$. Если $c<m$, тогда $\overline{B}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)=\left(\overline{D}_{bc}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)-\overline{D}_{cb}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)\right)$; если $c=m$, тогда $b<m$ и $\overline{B}_{bm}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)=-\overline{D}_{mb}\left(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, мы выразили рассматриваемые строки матрицы $\overline{B}$ через линейно независимые строки матрицы $\overline{D}$:

$$\begin{cases} \overline{B}_{bc}(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix})=(\overline{D}_{bc}(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix})-\overline{D}_{cb}(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix})), & b<c<m, \\ \overline{B}_{bm}(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix})=-\overline{D}_{mb}(\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}), & b<m,\ c=m. \end{cases} \tag{17}$$

Так как в (17) каждая строка матрицы D участвует в выражении только одной строки матрицы B, можно сделать вывод, что рассматриваемые

$2n^2+n$ строк матрицы B линейно независимы и, следовательно, $\mathrm{Rank}(B)=2n^2+n$.

Строки матрицы $\overline{C}$ линейно независимы. Рассмотрим минор $\overline{C'}$ матрицы $\overline{C}$, состоящий из столбцов, для которых $i=m, j\neq m$; $\overline{C'}{}^j_b=\overline{C}_b(^j_m)=\eta_m\delta^j_b-\eta_m\delta^j_m\eta_b=\delta^j_b$, откуда очевидно, что все строки $\overline{C}$ линейно независимы.

Перейдем к исходной матрице $\overline{F'}$. Рассмотрим столбцы, для которых $i=m$, $j\neq m$. Элементы столбцов, соответствующие строкам $\overline{C}$, образуют единичную матрицу, а элементы столбцов, соответствующие строкам $\overline{B}$, равны нулю в силу $\overline{B}_{bc}\left(^j_m\right)=\Omega_{mc}\delta^j_b+\Omega_{bm}\delta^j_c=0$. Следовательно, строки матриц C и B между собой линейно независимы. Таким образом, количество линейно независимых строк матрицы $\overline{F'}$ равно сумме количества линейно независимых строк матриц $\overline{C}$ и $\overline{B}$, и

$$\mathrm{Rank}(\overline{F'})=\mathrm{Rank}(\overline{C})+\mathrm{Rank}(\overline{B})=m+\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m(m+1)}{2}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что $\mathrm{Rank}(F)\geq\frac{m(m+1)}{2}$ и система (14) содержит не меньше, чем $\frac{m(m+1)}{2}$, существенных уравнений, которые накладывают на X^i_j не меньше, чем $\frac{m(m+1)}{2}$, существенных условий. Следовательно, размерность группы изотропии $\overline{G}_x$, а значит и стационарной подгруппы G_x, не превышает

$$\dim GL(m,\mathbb{R})-\frac{m(m+1)}{2}+1=m^2-\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m(m-1)}{2},$$

а размерность группы точных контактно-аффинных преобразований G не может быть больше, чем $\dim G_x+m=\frac{m(m+1)}{2}=2n^2+3n+1$.

Список литературы

1. **Кириченко, В. Ф.** Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В. Ф. Кириченко. – М. : Изд-во МПГУ, 2003. – 495 с.
2. **Shigeo, S.** On differentiable manifolds with certain structures which are closely related with almost contact structures / Sasaki Shigeo // Tohoku Math. J. – 1960. – Vol. 12, № 3. – P. 459–476.

References

1. Kirichenko V. F. *Differentsial'no-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-geometric structures on manifolds]. Moscow: Izd-vo MPGU, 2003, 495 p.
2. Shigeo S. *Tohoku Math. J.* 1960, vol. 12, no. 3, pp. 459–476.

Тяпин Никита Александрович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра геометрии и математического анализа, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: kaf_geom@pnzgu.ru

Tyapin Nikita Aleksandrovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of geometry and mathematical analysis, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 514.76
Тяпин, Н. А.
Автоморфизмы контактно-аффинных структур / Н. А. Тяпин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 4 (28). – С. 39–48.